Национално състезание “Европейско Кенгуру”

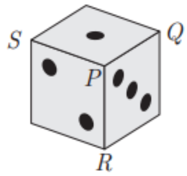
21 март 2024 г.

ТЕМА за 9-12 клас

След всяка от първите 24 задачи има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Задачи 25 и 26 изискват числов отговор. Първите 10 задачи се оценяват с по 3 точки, вторите 10 с по 4 точки, а последните 6 с по 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори и таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 90 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Даден е стандартен зар, т.е. сборът от точките върху всеки две срещуположни стени е равен на 7. Тежест на един връх на зара е сборът от точките върху трите стени, за които този връх е общ. Например тежестта на върха P е $1+2+3$. На колко е равна най-голямата от тежестите на върховете S, Q и R?

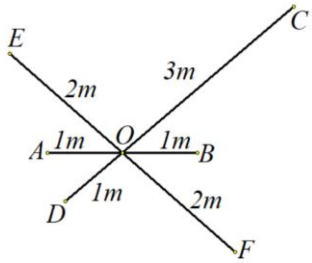


A) 7 **B)** 9 **C)** 11 **D)** 13 **E)** 15

2. Иво прави следните последователни скокове: 1) скача само на ляв крак; 2) скача с двата крака; 3) скача само на десен крак; 4) скача с двата крака. Няколко пъти той повтаря скоковете от 1) до 4) в същата последователност. Ако Иво започне със скок 1) и направи точно 48 скока, колко пъти левият му крак ще докосне земята?

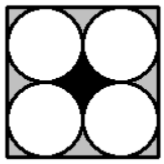
A) 12 **B)** 24 **C)** 30 **D)** 36 **E)** 40

3. Дадените отсечки AB, CD и EF се пресичат в точката O, като $OE = OF = 2\,m$, $OA = OB = OD = 1\,m$ и $OC = 3\,m$. Колко метра най-малко трябва да измине Мишо, ако тръгне от края на някоя от дадените отсечки, движи се по тях и премине през краищата на всяка от тях?



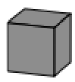
A) $14\,m$ **B)** $15\,m$ **C)** $16\,m$ **D)** $17\,m$ **E)** $18\,m$

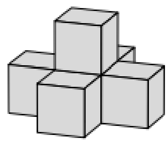
4. Показани са квадрат и четири кръга в него, които имат равни лица. Всеки кръг се допира до две съседни страни на квадрата и до два кръга. Намерете отношението между лицето на зачернената част от квадрата и лицето на останалата част от него без кръговете?



A) 1:4 **B)** 1:3 **C)** 2:3 **D)** 3:4 **E)** π:1

5. Разполагаме с еднакви кубчета, едното от които е черно. Вдясно е показана конструкция от 5 кубчета, която скрива черното кубче и нито една част от него не се вижда. Колко кубчета най-малко са необходими, за да се скрие тази конструкция, така че нито една част от нея да не се вижда?

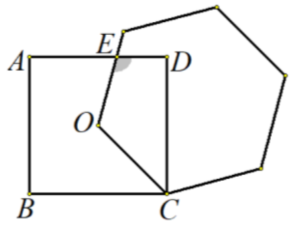




A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 13 **E)** 19

6. В трицифрения палиндром $\overline{aba}$ на еднаквите букви отговарят еднакви цифри, като не е задължително a и b да са различни. Да се намери сумата от цифрите на най-големия трицифрен палиндром, който е кратен на 6. Палиндром е число, което е едно и също при четене отляво надясно или отдясно наляво.

A) 16 **B)** 18 **C)** 20 **D)** 21 **E)** 24



7. Центърът O на квадрата $ABCD$ е връх на правилен шестоъгълник със страна CO. Другата страна на шестоъгълника през върха O пресича AD в точка E. Да се намери градусната мярка на $\sphericalangle OED$.

A) 105° **B)** 110° **C)** 115° **D)** 120° **E)** 125°

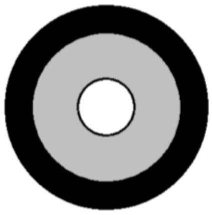
8. Дължината на оградата на нива с формата на правоъгълник е $40\,m$. Ако дължините на страните на нивата в метри са прости числа, намерете възможно най-голямото лице на нивата.

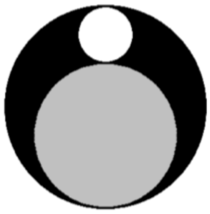
A) $99\,m^2$ **B)** $96\,m^2$ **C)** $91\,m^2$ **D)** $84\,m^2$ **E)** $51\,m^2$

9. Поставете буквите A, B, C и D по два пъти в клетките на таблицата 2×4, така че буквите във всеки ред и във всеки квадрат 2×2 да са различни. По колко различни начина може да стане това?

A) 12 **B)** 24 **C)** 48 **D)** 96 **E)** 198

10. Три кръга са изрязани съответно от черна, сива и бяла хартия. Първоначално кръговете са поставени един върху друг, както е показано на фиг. 1. Лицето на видимата част на черния кръг е седем пъти по-голямо от лицето на белия кръг. След това кръговете са преместени и се допират един до друг, както е показано на фиг. 2. Намерете отношението на лицата на видимата част от черния кръг на фиг. 1 и видимата част от черния кръг на фиг. 2.


Фиг. 1

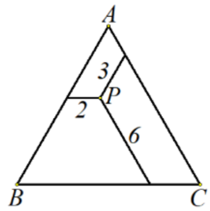

Фиг. 2

A) 3:1 **B)** 4:3 **C)** 6:5 **D)** 7:6 **E)** 9:7

11. Днес дъщерята на Мария роди момченце. След 2 години произведението от годините на Мария, на дъщерята и на внучето ще бъде равно на 2024. На колко години е Мария сега, ако нейните години и годините на дъщерята са четни числа?

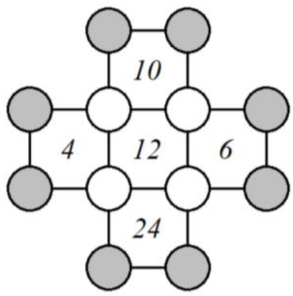
A) 42 **B)** 44 **C)** 46 **D)** 48 **E)** 50

12. Точката P е вътрешна за равностранния триъгълник ABC. През P са построени три отсечки, които са успоредни на страните на триъгълника, както е показано на чертежа. Ако дължините на тези отсечки са $2\,cm$, $3\,cm$ и $6\,cm$, да се намери периметърът на ΔABC.



A) $22\,cm$ **B)** $26\,cm$ **C)** $33\,cm$ **D)** $39\,cm$ **E)** $44\,cm$

13. Кръгчетата вдясно са върхове на квадрати. Запишете по едно число във всяко от тях, така че числото във всеки квадрат да е равно на произведението на числата в четирите му върха. Намерете произведението на числата в осемте затъмнени кръгчета?



A) 20 **B)** 40 **C)** 80 **D)** 120 **E)** 480

14. Определен брой бонбони са разпределени в 4 купички. В първата купичка броят на бонбоните е колкото са купичките, в които има точно по 1 бонбон, във втората броят на бонбоните е колкото са купичките, в които има точно по 2 бонбона, в третата броят на бонбоните е колкото са купичките, в които има точно по 3 бонбона и в четвъртата броят на бонбоните е колкото са купичките, в които няма бонбони. Колко е броят на всички бонбони?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

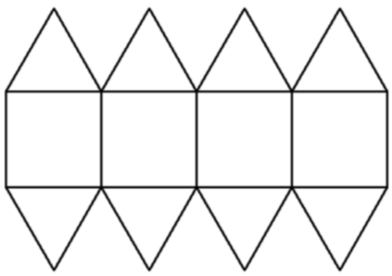
15. Всички стени на куб с ръб a (цяло число) са оцветени в червено. Кубът е разрязан на a^3 на брой единични кубчета, т.е. на кубчета с ръб 1. Намерете a, ако броят на единичните кубчета с точно една оцветена стена е равен на броя на единичните кубчета с нито една оцветена стена.

A) 4 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 10

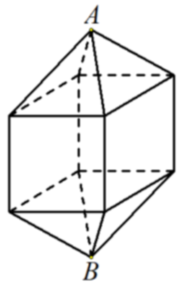
16. Във върховете на изпъкнал осмоъгълник са записани 8 измежду естествените числа от 1 до 12, така че сумата на числата във всяка двойка съседни върхове е кратна на 3. Кои числа не участват в записа на 8-те числа?

A) 1, 5, 9, 12 **B)** 3, 5, 7, 9 **C)** 1, 2, 11, 12 **D)** 5, 6, 7, 8 **E)** 3, 6, 9, 12

17. На фиг.1 е показана композиция от 4 квадрата и 8 равностранни триъгълника с дължини на страните $10\,cm$. Композицията е изрязана от картон и е сгъната по начин, показан на фиг. 2. Намерете дължината на отсечката AB.



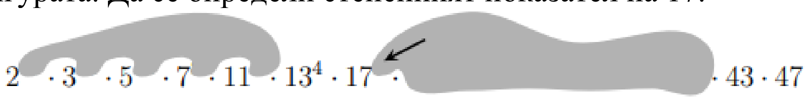
Фиг. 1



Фиг. 2

A) $5\sqrt{2}\ cm$ **B)** $10\left(1+\sqrt{2}\right) cm$ **C)** $25\,cm$ **D)** $10\left(1+\sqrt{3}\right) cm$ **E)** $20\sqrt{2}\ cm$

18. Числото $n!=1.2.3....n$ е записано на лист хартия в каноничен вид, т.е. като произведение от степените на последователните по големина негови прости делители. Върху листа капнало мастило и заличило част от записаната информация, както е показано на фигурата. Да се определи степенният показател на 17.



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

19. В единия от всеки два последователни дни Ленко винаги говори истината, а в другия твърденията му са винаги лъжи. Един ден той изговорил точно 4 от следващите 5 твърдения. Кое от тях е невъзможно да е измежду изговорените?

A) Вчера лъгах и утре ще лъжа;
B) Днес говоря истината и утре ще говоря истината;
C) 2024 се дели на 11;
D) Вчера беше сряда;
E) Утре е събота.

20. Сборът от цифрите на естественото число N е три пъти по-голям от сбора от цифрите на числото $N+1$. Намерете възможно най-малкия сбор от цифрите на N.

A) 9 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 27

21. Таня се разхождала в парка. През половината от времето, през което се е разхождала, тя се е движила със скорост $2\,km/h$. Половината от цялото разстояние, което Таня е изминала по време на разходката, тя е изминала със скорост $3\,km/h$. През останалото време Таня се е движила със скорост $4\,km/h$. През каква част от цялото време на разходката Таня се е движила със скорост $4\,km/h$?

A) $\frac{1}{14}$ **B)** $\frac{1}{12}$ **C)** $\frac{1}{7}$ **D)** $\frac{1}{5}$ **E)** $\frac{1}{4}$

22. Двадесет точки са разположени върху окръжност на равни разстояния една от друга. Всеки две от точките са свързани с отсечка. Колко от получените хорди са с дължина, по-голяма от радиуса на окръжността и по-малка от диаметъра?

A) 90 **B)** 100 **C)** 120 **D)** 140 **E)** 160

23. Боби и Дани имат еднакъв брой банкноти: по 8 от 5 лв., по 12 от 10 лв., по 10 от 20 лв., по 4 от 50 лв. и по една банкнота от 100 лв. Всеки от тях си купил таблет на стойност 575 лв. с точен брой от своите банкноти. Боби заплатил с възможно най-много банкноти, а Дани – с възможно най-малко. Колко общо банкноти са им останали?

A) 15 **B** 16 **C)** 17 **D)** 18 **E)** 19

24. Разглеждаме точките $P(m,n)$ и $Q(n,m)$ спрямо правоъгълна координатна система Oxy, където координатите m и n са цели положителни числа, като $n>m$. За колко различни двойки (n,m) лицето на триъгълника OPQ е равно на 2024?

A) 4 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 12

За да разграничи участниците с равен брой точки, Кенгуруто задава две допълнителни задачи, които изискват посочване на числов отговор.

25. В равнината са дадени n на брой различни прави l_1, l_2, …, l_n. Правата l_1 пресича точно пет от другите прави, правата l_2 пресича точно девет от другите прави, а правата l_3 пресича точно единадесет от другите прави. Намерете възможно най-малката стойност на n?

26. Дължините на ръбовете на правоъгълен паралелепипед са цели числа. Нека обемът, пълната повърхнина и сумата от дължините на всичките му ръбове са равни съответно на m, n и l. Ако $m-n+l=14$, колко е възможно най-малкият обем на паралелепипеда?